

АКТИВІЗАЦІЯ ПІЗНАВАЛЬНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ СТАРШОКЛАСНИКІВ НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

У статті на основі огляду наукової літератури й досліджень подано систему прийомів розвитку розумової діяльності школярів під час засвоєння математики на основі емпіричного й теоретичного мислення. Подано класифікацію розумових прийомів. Наведено приклади операційної діяльності учнів, необхідної для активного засвоєння математики в старших класах ЗОСШ.

Знання, уміння та навички, котрі молодь набуває й виробляє, навчаючись у школі, беззаперечно, є важливими. Поряд з цим сьогодні актуальності набуває поняття компетентності учня, що визначається багатьма чинниками, оскільки саме компетентність є тим індикатором, що дозволяє визначити готовність учня-випускника до життя, до активної участі в житті суспільства. Масова підготовка молоді до самоосвіти, виховання в неї творчих інтересів нерозривно пов'язані з нарощуванням інтелектуального потенціалу всього навчально-пізнавального процесу, з підвищенням якості і продуктивності розумової праці.

У психолого-педагогічній літературі достатньо обґрунтовано положення про те, що в процесі навчання необхідно виділяти дві самостійні, але взаємозв'язані задачі: оволодіння учнями змістом того чи іншого предмета і цілеспрямоване формування в них прийомів розумової діяльності (Д.Н. Богоявленський, А.І. Раїв, В.Ф. Паламарчук і др.).

Формування в учнів прийомів розумової діяльності, уміння вчитися – завдання, яке необхідно вирішувати на всіх етапах навчання, починаючи з раннього шкільного віку. Проте особливій уваги в цьому плані вимагають старшокласники, в яких мислення з емпіричного рівня переважно переходить на теоретичний, і тому сильніше позначаються не тільки на пропусках знань, але й на відсутності сформованих раціональних способів роботи. Як свідчать досвід і спеціальні дослідження психологів (Д.Н. Богоявленський, П.Я. Гальперін, Н.А. Менчинська, Е.Н. Кабанова-Меллер, З.І. Калмикова, Г.С. Костюк, Н.Ф. Талізіна й ін.), частина старшокласників не може самостійно оволодіти ними. Тому необхідно спеціально формувати у школярів такі прийоми.

Мета роботи полягає в розробці методики цілеспрямованого формування і систематизації в старшокласників прийомів розумової діяльності на уроках математики.

Об'єктом дослідження став навчальний процес з математики в старших класах загальноосвітньої школи. *Предметом* – використання прийомів і засобів активізації навчання математики в основній школі.

Методика цілеспрямованого формування і систематизації в старшокласників примов розумової діяльності на уроках математики розглядається в єдності з багатьма відомими формами і методами активізації пізнавальної діяльності учнів, підвищення ефективності уроку математики, зокрема з проблемним навчанням. Природно, роботу по формуванню окремих прийомів розумової діяльності і їх сукупності необхідно починати в початкових і середніх класах.

Зростання складності матеріалу в старших класах підвищує вимоги до розумової діяльності школярів. Як допомогти їм ліквідувати наявні пропуски в знаннях, підвищити продуктивність праці і якість знань? Ці і багато інших питань постійно хвилюють кожного вчителя. Багаторічні спостереження за старшокласниками на уроках переконали, що "слабкою ланкою" в засвоєнні математики є невідповідність рівня розвитку мислення і способів навчальної роботи, складності матеріалу, що вивчається. Тому вчитель повинен чітко знати особливості мислення старшокласників, і знаходити найбільш ефективні і науково обґрунтовані шляхи його формування і розвитку.

У психології розглядають два основні види мислення – емпіричне і теоретичне. *Емпіричне*, або наочне мислення має своєю кінцевою метою пізнання і класифікацію предметів за їх зовнішніми ознаками. Психологічний аналіз цього виду мислення зводиться в основному до виділення деяких розумових процесів (прийомів): абстракції і узагальнення, порівняння і класифікації. *Теоретичне* ж мислення – це перш за все аналіз і синтез, а потім абстракція і узагальнення, що є похідними від них.

Якщо предмет розглядатиметься сам по собі, поза деякою системою і зв'язком з іншими предметами, то він стане об'єктом емпіричного мислення. Прикладом може служити вивчення певної теми програми без встановлення її зв'язків з іншим матеріалом. Але якщо ця ж тема буде проаналізована зі встановленням усіх необхідних зв'язків з іншими питаннями курсу, то вона стане об'єктом теоретичного мислення. Наприклад, у 3-4 класах вивчається площа фігур, вводяться одиниці вимірювання, вирішуються прості завдання на знаходження площ, обчислюють, зокрема, і площу прямокутника. Тут не встановлюються зв'язки з іншими розділами, немає поки передумов для утворення системи знань про площі. Тому дана тема навчається на рівні емпіричного мислення. У 10 класі проводиться повторення теми "Площі", у тому числі і площі прямокутника. Тепер площа прямокутника виступає як окремий випадок площ багатокутників. Мало того, сама ідея, принцип, покладений в основу вимірювання площ прямокутників (багатокутників), є окремий випадок більш загальної ідеї меж у вимірюванні площ. Таким чином, всі найважливіші властивості поняття площі прямокутника можна розкрити тільки усередині загальної теорії площ, яка зв'язана з поняттям межі. Тому площа прямокутника виступає тут як об'єкт теоретичного мислення.

Застосування того або іншого рівня мислення залежить не тільки від віку учнів, але і від самої методики навчання, наприклад, у 4 класі через вікові особливості школярів утруднено застосування теоретичного мислення, проте в 11 класі його можливості не завжди використовуються. Наприклад, правила обчислення первісних можна завчити і успішно застосовувати для вирішення завдань. Так само раніше можна було поступити з правилами обчислення похідних і правилами обчислення меж (теореми про межі) послідовностей і функцій. А можна показати, що ці теми тісно зв'язані, в основі кожній з них,

зрештою, лежать властивості меж функцій. На основі цих реальних істотних зв'язків встановити ієрархію, виділити особливості, привести знання в систему. У першому випадку теми вивчаються на емпіричному рівні, в другому – на теоретичному.

Абстрактний характер математики як навчального предмета, дедуктивний спосіб викладання матеріалу в старших класах зумовлює специфіку мислення, званого математичним.

Великий інтерес становлять висловлення видатних математиків про особливості математичного мислення і його стилю, про математичний розвиток. А.Я. Хинчін до особливостей математичного мислення відносить такі його риси, як домінування логічної схеми міркувань, лаконізм, чітку розчленованість ходу міркувань, точність символіки, повноцінну аргументацію. Академік Б.В. Гнеденко, окрім раніше названих відзначає ще таку рису, як здатність уловлювати нечіткість міркувань, відсутність необхідних ланок доказу.

А.И. Маркушевич, говорячи про математичний розвиток учнів, перераховує основні навички математичної діяльності: розвиток кількісних і просторових уявлень, уміння вичленяють суть питання, тобто уміння абстрагувати, переходити від конкретної постановки питання до схеми, узагальнювати отримані висновки і ставити нові питання, а також точність, стислість і ясність словесного виразу думки. Але найповніші, на наш погляд, властивості і особливості математичного мислення розкриті В.А. Крутецьким в результаті дослідження математичних здібностей школярів. Вони виражаються, зокрема, у здатності до формалізованого сприйняття матеріалу, схопленні формальної структури завдання, до логічного мислення у сфері кількісних і просторових відносин, числової і знакової символіки; у здатності до швидкого й широкого узагальнення математичних об'єктів, відносин і дій, до згортання процесу математичного міркування, у здатності мислити згорнутими структурами.

Доповнюють характеристику математичного мислення такі його особливості, як гнучкість, прагнення до ясності, перемикання з прямого на зворотний хід думки, узагальнена пам'ять на математичні відносини, типові характеристики, схеми міркувань і доказів, методи вирішення завдань і принципи підходу до них.

Відзначимо також, що мислення старших школярів, здібних до математики, відрізняється схильністю до засвоєння теоретичних знань, наукових понять і закономірностей, до виділення істотного, до теоретичних побудов і узагальнень. Мислення таких школярів в основному теоретичне, хоча емпіричний рівень не відкидається, а перетворюється, удосконалюється.

Класифікація розумових прийомів

У методиці математики виділяються загальні і часткові розумові прийоми. А серед загальних є менш і більш

загальні. Наприклад, прийом побудови графіка функції $y = f(x)$ частковий, оскільки застосовується в одній темі. А "введення додаткових елементів на кресленні" можна вважати загальним прийомом, оскільки він застосовується в усій геометрії. Прийоми, вживані в процесі пізнання не тільки в математиці, назвемо *загально пізнавальними прийомами операційної діяльності*. Прийоми, вживані в процесі вивчення різних розділів математики, - *загальними*, а при вивченні окремих її тем, - *частковими*. Кожну групу можна ділити на підгрупи. Проведемо класифікацію виділених прийомів за ознакою їх спільності.

Загально пізнавальні прийоми або способи такі. Спосіб сходження від абстрактного до конкретного. Цілеспрямовані проби при вирішенні завдань. Застосування моделей при вирішенні завдань. Складання алгоритмів на завданнях-моделях. Застосування здогадки, аналогії при пошуку нових знань. Постановка проблеми, висунення гіпотези. Розкриття зв'язків і відносин між поняттями. Цілеспрямована актуалізація знань через аналіз ситуації, через зв'язки, аналогічно. Перенесення прийому в нові ситуації. Пошук різних інтерпретацій отриманого результату. Заміна понять їх визначеннями. Пригадування плану, ідей, схем, методів, деталізація як прийоми відтворення. Підведення під поняття або доказ вигляду "А" є "В". Схема індуктивних висновків. Аналіз і синтез матеріалу, аналіз через синтез. Спростування тверджень способом контр прикладів. Робота з текстом: смислове групування, складання плану, виділення головного, істотних зв'язків, встановлення відносин між поняттями, відновлення посилань, яких бракує.

Застосування минулого досвіду при вирішенні завдань. Конструювання визначень (через рід і видову відмінність, генетичних). Систематизація знань. Порівняння об'єктів. Аналіз і синтез. Узагальнення матеріалу. Класифікація об'єктів, абстрагування їх властивостей. Складання схем. Формулювання узагальненого завдання. Відкидання неістотного і утримання істотного. Складання конспекту. Встановлення причинно-наслідкових відносин і ін.

Серед загальних прийомів у математиці можна виділити наступні. Уведення додаткових елементів. Відкидання частини умови (не головного). Аналіз структурних особливостей класу математичних задач. Побудова різних схем розпізнавання залежно від опори на різні рівносильні ознаки. Алгоритми доказу рівнозначності математичних речень, доказ методом від супротивного, методом математичної індукції, методом повної індукції, конструювання зворотної теореми. Перетворення умови задачі з метою позбавлення від якоїсь ознаки. Схеми побудови дедуктивних висновків, синтетичного і аналітико-синтетичного доказу. Цілеспрямований пошук області знань для доказу теорем або вирішення задач. Перенесення аналітичних міркувань в план геометричних уявлень. Встановлення загального в структурі задач. Переклад математичних речень мовою математичних символів. Пошук ідеї доказу. Виділення загальної схеми вирішення класу завдань. Утримання в голові плану вживаного методу доказу й ін.

Часткові прийоми. Розумові уявлення про розташування фігури в просторі в динаміці. Узагальнення способів перетворення виразу. Правила-орієнтири вирішення завдань на доказ існування межі послідовності, визначення виду монотонності послідовності, складання рівняння дотичної до кривій, обчислення похідної, визначення виду монотонності функції, її екстремумів, розв'язування квадратичних нерівностей графічним методом, доказ існування межі функції в точці, обчислення похідної складної функції, знаходження наближених значень дійсного числа по недоліку і надлишку, обчислення площі криволінійної трапеції, вирішення текстових задач на найбільше і найменше значення, дослідження функції за допомогою її похідної, вирішення тригонометричних нерівностей графічним методом, знаходження для функції первісної (приватної), знаходження зворотної функції на ділянці строгої

монотонності, вирішення системи нерівностей з двома змінними. Правила-орієнтири побудови перетинів многогранників методом слідів і методом відповідності, лінійного кута двогранного кута при основі в призмі і піраміді, розкладання вектора по компланарних, визначення кута між векторами, довжини відрізка за допомогою векторів (не у координатній формі), вирішення задач на доказ типу "А" є "В", докази перпендикулярності прямих і площин в просторі за допомогою скалярного добутку, складання рівняння площини, що проходить через дану точку, обчислення відстані від точки до площини і ін.

Багато прийомів є складними, а тому їх утворюють ряди простіших прийомів, наприклад, формулювання узагальненої задачі припускає вивчення і аналіз даної конкретної задачі, виділення провідного, основного параметра, по якому повинне бути проведене узагальнення вибраного параметра, переформулювання умови даної задачі і так далі.

Ієрархія основних прийомів визначається закономірностями розумової діяльності в кожному рівні мислення. Одні прийоми відповідають емпіричному рівню мислення, наприклад: підведення під поняття, перенесення аналітичних міркувань у план геометричних уявлень і т. д., інші – теоретичному. Такими є аналіз через синтез, встановлення загального в структурі задач, складання алгоритмів на задачах-моделях і багато інших.

Основним стрижнем, навколо якого групуються і якому підпорядкована решта розумових прийомів, є прийом *узагальнення* (емпіричного і теоретичного). Ознаки і властивості об'єктів, виділені шляхом абстракції, узагальнюються.

Одні прийоми обслуговують *аналітичну* діяльність учнів. Вони носять алгоритмічний і напівалгоритмічний характер. Інші – *евристичну* і дані у вигляді загальних схем і орієнтирів, наприклад загальна схема вирішення задач за Д. Пойа. Але багато прийомів властиві обом видам діяльності, як, наприклад, застосування аналогії, конструювання визначень через рід і видову відмінність і ін.

Щодо прийомів і способів операційної діяльності, необхідних для активного засвоєння математики в старших класах, слід зазначити таке. З метою виділення конкретних прийомів розумової діяльності школярів, необхідних для засвоєння навчального матеріалу, нами були детально проаналізовані теоретична частина і завдання посібників з математики для старших класів. Це дало можливість визначити, які ж прийоми потрібні учням для активного засвоєння матеріалу.

Наведемо з цієї точки зору аналіз теми "Взаємне розташування прямої і площини. Ознака паралельності прямої і площини". Для її засвоєння необхідні:

- актуалізація наявних знань, близьких до даної теми (про взаємне розташування прямої і площини);
- пригадування різних варіантів взаємного розташування прямої і площини, істотних ознак кожного розташування (застосування методу повної індукції);
- вичленення (абстракція, узагальнення) основної ознаки, по якій встановлюються можливі відносини прямої і площини;
- класифікація відносин. Знання суті доказу "методом від супротивного", уміння скласти необхідний мінімальний набір посилок для отримання виводу (змістовне узагальнення);
- уміння скористатися отриманим проміжним виводом як новою посилкою; розуміння і облік того, що "ланцюг" міркувань може розгалужуватися, уміння проводити логічні міркування по кожному напрямку до кінця;
- уміння виділяти ідею доказу (узагальнення), застосовувати її для синтезу на новому ступені (з'ясування схеми доказу, його логічних зв'язків);
- розуміння причин отриманих суперечностей і достатніх підстав для висновку теореми;
- уміння скласти зворотну теорему;
- знання того, що в матеріалі необхідно заучувати напам'ять, що тільки глибоко розуміти, а що не вимагає запам'ятовування;
- уміння скласти конспект по темі, максимально використовуючи математичну символіку.

Відзначимо, що багато з перерахованих прийомів мають складну структуру і припускають оволодіння більш елементарними прийомами.

Прийом переформулювання умови задачі разом з теоретичним узагальненням може підказати різні способи рішення. Проілюструємо це на прикладі вирішення нерівності, запропонованої учням після вивчення теоретичного матеріалу. Приводиться зразок міркувань учнів.

1) Уточнення понять і заміна їх визначеннями.

Зліва стоїть модуль, це невід'ємне число, з іншого боку – це відстань між точками, в даному випадку x і 7 . Невідоме положення точки x .

2) Встановлення зв'язків між даними умовами (аналіз).

Відстань між точками x і 7 не перевищує двох одиниць. Точка x може бути з будь-якого боку від 7 . Точка x не єдина.

3) Переформулювання умови задачі.

Знайти на числовій прямій безліч точок, віддалених від 7 на відстань, не більшу двох одиниць.

4) Рішення.

Межі проміжку -5 і 9 . Всі шукані точки належать відріzkу $[-5;9]$.

5) Пошук різних інтерпретацій символічних записів.

Це може підказати інші способи рішення і застосування знань.

Систематизація таких матеріалів відповідає на питання "Які прийоми розумової діяльності потрібні школярам для активного засвоєння матеріалу певного розділу?"

Охарактеризуємо основні прийоми розумової діяльності старшокласників при засвоєнні математики.

Емпіричне мислення

Порівняння як простий прийом емпіричного мислення відноситься і до розумових, і до навчальних прийомів. При цьому розрізняють такі види порівняння на уроці: порівняння реальних предметів за однією ознакою; порівняння однорідних предметів за кількома ознаками; порівняння різних етапів у розвитку одного явища; порівняння відносин і функціональних

зв'язків. *Приєм порівняння* виражається за допомогою *правила-орієнтури*, що містить таку послідовність дій:

- визначити мету порівняння;
- виділити різні ознаки порівнюваних об'єктів; - визначити можливі лінії порівняння відповідно до поставленої мети і виявлених ознак;
- встановити загальні ознаки;
- встановити відмінності в порівнюваних об'єктах;
- сформулювати висновок про схожість і відмінність даних об'єктів відповідно до поставленої мети.

Наприклад, необхідно порівняти докази теорем про єдину межу числової послідовності і функції в точці. Мета порівняння – з'ясувати загальне в схемі доказу для кращого запам'ятовування. Ознаки порівнюваних об'єктів: формулювання теореми, метод доказу, ідея доказу, використання допоміжних думок. Можливі лінії порівняння: формулювання теореми, метод, схема доказу, допоміжні думки. *Загальні ознаки*: однакові твердження у формулюванні про наявність межі, висновок теорем; один і той же метод доказу – метод від супротивного, однакові ідеї доказу: припустивши, що меж принаймні два, скористатися його визначенням і шляхом логічних міркувань прийти до

суперечності; використовується одна і та ж допоміжна нерівність $|a+b| \leq |a|+|b|$; однакова схема міркувань. *Відмінне* в порівнюваних об'єктах: у теоремі про єдину межу послідовності змінна n прагне до нескінченності, а в теоремі про межу функції в точці змінна x прагне до a . В процесі доведення теореми про межу функції в точці, у

відмінності від відповідної теореми про межу послідовності, застосовуються дві нерівності $|f(x)-a| < \epsilon, |x-a| < \delta$.

Висновок: дані теореми і їх докази схожі, тому досить добре засвоїти одне з них і з'ясувати, чим відрізняється друга теорема і її доказ від першої. Це зменшує обсяг інформації, необхідної для запам'ятовування.

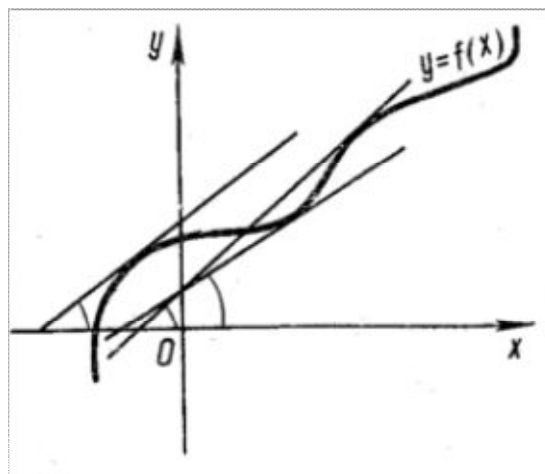
У навчальному процесі *узагальнення* виступає в подвійній ролі: як розумовий прийом і як чинник розширення знань. Розрізняють узагальнення від "часткового до загального" (індуктивні) і "від загального до часткового" (дедуктивні). Схема емпіричного узагальнення полягає в наступному: порівняння предметів, відбір загальних якостей (абстрагування), перелік властивостей (узагальнення).

У учбовому процесі це найпоширеніший вид узагальнення. Він виражається наступним *правилом-орієнтиром*:

- визначити мету узагальнення;
- знайти різні ознаки об'єктів, які узагальнюються;
- вказати загальні ознаки об'єктів, які узагальнюються відповідно до поставленої мети;
- сформулювати висновок.

У процесі навчання від узагальнення практично не виділяється прийом *абстрагування*. У емпіричному мисленні йому передують порівняння і елементарний аналіз. Даний прийом виражається за допомогою наступного *правила-орієнтури*:

- визначити мету абстрагування;
- визначити різні властивості об'єктів; - виділити ті властивості, які повинні бути відвернуті у зв'язку з поставленою метою; - виділити ті властивості, від яких потрібно відвернутися у зв'язку з поставленою метою;
- знайти відвернуті властивості в інших предметах;
- сформулювати назву відвернутих властивостей на математичній мові.



Мал. 1

Так при вивченні теми "Зростання і убуття функції" на екран проектується мал. 1. Ставиться мета абстрагування. Для отримання нових знань потрібно: 1) порівняти взаємне розташування кривої і дотичних, дотичних і осі OX ; 2) визначити різні властивості порівнюваних об'єктів (дано графік зростаючої функції, функція диференційована на даному проміжку, дотичні розташовані вище і нижче за графік, вони утворюють гострі кути з додатним напрямом осі OX , їх кутові коефіцієнти додатні, тому похідна функції додатна на заданому проміжку); 3) виділити ті властивості, які повинні бути відвернуті у зв'язку з поставленою метою (найістотнішими є зв'язки між зростанням графіка функції і гострим кутом нахилу дотичних до додатного напрямку осі OX ; кутом нахилу дотичної і знаком кутового коефіцієнта – похідною); 4) виділити ті властивості, від яких потрібно відвернутися у зв'язку з поставленою метою (не істотно, чи розташована дотична над графіком або під графіком, вид конкретної кривої); 5) знайти відвернуті властивості в інших предметах (на дошку проектується декілька графіків різних зростаючих функцій; проводяться дотичні до них; учні

переконуються, що кут нахилу дотичних до осі OX і тут гострий); б) сформулювати названі відвернуті властивості на математичній мові (якщо функція зростає і диференціюється на $[a;b]$, то дотичні до її графіка утворюють гострі кути з додатним напрямом осі OX , означає кутові коефіцієнти їх позитивні, звідси похідна на $[a;b]$ позитивна).

Завершує ієрархію основних прийомів емпіричного мислення **класифікація** – віднесення одиничних об'єктів або явищ до відповідного роду або класу. Даний прийом виражається за допомогою наступного *правила-орієнтиру*:

- вивчити окремих об'єкт (тут пізнається одиничне шляхом аналізу і порівняння його властивостей, за допомогою абстрагування виділяються і узагальнюються істотні ознаки і відносини);

- відновити в пам'яті родове поняття, правило або закон, до якого повинен бути віднесений даний одиничний об'єкт (у голові учня може виникнути декілька вірогідних родових понять, правил або законів; він пригадує їх основні властивості; думка його працює із загальним);

- істотні ознаки і відносини одиничного об'єкту (пізнане особливе в одиничному) співвідносяться з такими ж ознаками і відносинами приведеного загального родового поняття, правила або закону (тут відбувається перехід від загального до особливого шляхом аналізу, думка учня, рухаючись одночасно від одиничного і загального, як би сходиться на особливому);

- співвідношення одиничного і загального закріплюється в мисленні і мові учня дедуктивним висновком, внаслідок чого дані одиничні предмети і явища класифікуються.

Теоретичне мислення.

Процес мислення здійснюється по схемі "синтез-1 – аналіз – синтез-2". Нове завжди виникає як ціле, яке потім формує свої частини, розгортаючись в систему. Це виглядає як "схоплювання" мисленням цілого раніше його частин і складає характерну рису змістовного творчого мислення. Наприклад, математичний текст, що вивчається, сприймається спочатку цілком, без розмежування в нім окремих частин, головного і другорядного, так само спочатку сприймається доведення теореми і ін. Подальше пізнання об'єкта здійснюється за допомогою аналізу – самої елементарної операції теоретичного мислення. **Аналіз** полягає в розчленовуванні залежностей, що перекривають один одного, у виявленні "внутрішніх" суттєвих властивостей речей в їх закономірному взаємозв'язку. Аналіз не просто розчленовує ціле на частини, він завжди цілеспрямований на виявлення "внутрішніх" суттєвих зв'язків і відносин в речах. За допомогою "синтезу-2" здійснюється зворотний перехід від абстрактних положень до уявного відновлення явища – до конкретного.

Розглянемо аналіз на прикладі самостійного вивчення теоретичного матеріалу по темі "Приріст функції" учнями, які володіють цим прийомом. При першому читанні текст сприймається в цілому, далі увага фіксується на його частинах. Спочатку мова йде про визначення аргументу і залежної змінної, потім вводяться визначення приросту аргументу і функції, далі даються визначення зростаючої і убуючої функції. І в завершенні розглядається декілька прикладів на встановлення зростання і убубання функції. Далі думка направлена на встановлення зв'язків і відносин між виділеними частинами цілого. Визначити приріст аргументу і функції можливо лише тоді, коли визначені значення аргументу і залежної змінної. Порівнюючи формули, які задають прирости, бачимо, що вони аналогічні і є різницею між новим і первинним значенням (аргументу і функції). Визначення зростаючої і спадаючої функції пов'язане із знаком її приросту. Встановлюється

співвідношення між Δx і Δy . Пригадуються раніше відомі визначення зростаючої і спадаючої функції.

Прийом аналізу через синтез не можна виразити за допомогою правила-орієнтиру. І взагалі всі прийоми теоретичного мислення відносяться до евристичної розумової діяльності, тому їх не можна виразити алгоритмом або правилом-орієнтиром. З цим і пов'язана трудність їх формування.

У теоретичному мисленні **абстракції** – це вичленення суттєвих зв'язків і відносин, лежачих в основі існування явища або об'єкту. Наприклад, порівнявши способи завдання числових послідовностей і функцій, переконуємося, що вони майже однакові. Це емпірична абстракція. У теоретичній абстракції вичленує їх реальний суттєвий зв'язок: послідовність – окремих випадок функції, тому способи завдання функції переносяться на послідовності. У теоретичній абстракції відображається суть, а емпіричній – тільки те, що "лежить на поверхні" - схожість способів завдання. У емпіричній абстракції відображається відповідь на питання "що?", а в теоретичній – на питання "чому?". Покажемо на прикладі, як аналіз через синтез веде до теоретичних абстракцій і узагальнення.

Розглянемо завдання: "Скільки діагоналей має n -кутник, де $n > 3$?" Розглянемо конкретні випадки, S_n – кількість діагоналей: $n = 4$; $S_n = 2$; $n = 5$; $S_n = 5$.

Закономірність по отриманих результатах відмітити важко. З'ясуємо, які взаємні зв'язки існують між конкретним числом точок на площині, ніякі три з яких не лежать на одній прямій. Хай $n = 5$. Всі точки з'єднуються попарно. Кожна точка

$$\frac{5-4}{2} = 10$$

з'єднується чотирма. Але кожен відрізок рахується двічі. Їх буде $\frac{5-4}{2} = 10$.

Встановимо співвідношення серед відрізків. Роль у них різна. Одні є сторонами, а інші – діагоналями. Встановимо зв'язок між числом сторін і точок (це реальний суттєвий зв'язок). Їх число однакоє (це вже абстракція і узагальнення). В даному випадку – 5, тоді діагоналей $10 - 5 = 5$. Які загальні зв'язки виявляються в даному конкретному випадку? Число відрізків, що виходять з кожної точки, завжди менше на одиницю числа точок (це абстракція, відокремлена властивість, що виражає суттєвий загальний зв'язок). Загальне число відрізків буде дорівнювати добутку двох послідовних чисел, більше з яких рівно числу точок. Всі відрізки розподіляються на дві групи – сторони і діагоналі. Сторін завжди буде стільки ж, скільки і точок. Останні – діагоналі.

Загальне – раніше всього істотно зв'язане. Встановимо цей загальний зв'язок, об'єднуючий раніше отримані

$$S_n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$$

абстракції. Він виразиться математичною формулою числа діагоналей n -кутника:

Отримані проміжні зв'язки є абстракції, оскільки вони виражають відносини, що мають характер загальності, виступають генетичною основою цілого – кінцевої формули числа діагоналей. Ця формула є абстракцією.

Емпіричне узагальнення виробляється при порівнянні предметів і уявлень про них, що дозволяє виділити в них зовнішні властивості – однакові і загальні. Його схема, приведена раніше, не дозволяє виділити істотні особливості самого предмету, внутрішні зв'язки всіх його сторін. Теоретичне узагальнення відображає внутрішні відносини і зв'язки, суть цілого. Схема процесу *змістовного (теоретичного) узагальнення* якісно відрізняється від схеми емпіричного узагальнення. Вона містить *таку послідовність дій*: вичленення істотних властивостей, загального з приватного (аналіз через синтез) – абстракція (розкриття власних, внутрішніх властивостей об'єктів в закономірних залежностях) – узагальнення, що відображає істотно загальне в предметах і явищах.

В.В. Давидов [7] підкреслює, що для формування теоретичних узагальнень потрібна особлива, відмінна від розробленої в психології і педагогіці, методика формування поступового узагальнення. Проілюструємо цю думку на матеріалі методики навчання школярів вирішенню задач. Перша схема узагальнень, і в даний час вживана в школі повсюдно на уроках математики, вимагає, як наголошувалося раніше, вирішення великої кількості однотипних задач. В результаті поступового абстрагування у учнів відбувається усвідомлення способу їх рішення. Характерно, що на уроці процеси абстрагування і узагальнення способу рішення часто відбуваються стихійно. Тому більшість учнів не можуть самостійно глибоко усвідомити спосіб рішення. Вони, в кращому разі, запам'ятовують його на нетривалий час. У такому разі школярі спочатку засвоюють конкретне і лише в кінці – загальне, істотне. Процес усвідомлення способу вирішення класу задач при навчанні по схемі теоретичних узагальнень починається з аналізу через синтез, а не порівняння. Тут не потрібно забезпечувати школярам великий фактичний матеріал для порівняння (однотипні завдання). Досить вирішити одну-дві задачі-моделі. Але уявну діяльність школярів необхідно організувати так, щоб вони відразу усвідомили спосіб вирішення всього класу однотипних задач. Після цього решта всіх задач даного класу вирішується за допомогою підведення під загальну схему.

Розглянемо ще спосіб *сходження від абстрактного до конкретного* – основний спосіб теоретичного мислення. Суть його полягає в тому, що спочатку засвоюється загальне, абстрактне, після чого здійснюється перехід до реального, конкретного. Так, при обчисленні об'ємів тіл обертання такими первинними абстракціями є поняття інтеграла, формула Ньютона-Лейбніца, система координат, обертання і ін. Їх сенс і роль розкривається через систему їх реальних, внутрішніх зв'язків, в конкретному виведенні формул об'єму конуса, кулі і ін.

У розумовій діяльності учнів при засвоєнні знань роль таких абстракцій виконують, зокрема, загальні принципи, прийоми, орієнтири, алгоритми, ідеї, схеми, методи. Ці абстракції служать початком в русі до конкретного – завданням, теоремам. Таким чином, якщо немає таких абстракцій, немає і сходження від абстрактного до конкретного, а значить, немає теоретичного мислення в повному його розумінні. Процес сходження від *абстрактного до конкретного* і *проводження від конкретного до абстрактного* полягає в єдності, але провідним є сходження, що виражає природу теоретичного мислення. Тому розвиток теоретичного мислення учнів означає оволодіння цими двома процесами з переважанням руху від абстрактного до конкретного.

ЛІТЕРАТУРА

1. *Богоявленский Д.И.* Формирование приёмов умственной работы учащихся как путь развития мышления и активизации учения / Д.И. Богоявленский // Вопросы психологии, 1962, №4. – С. 20-28.
2. *Богоявленский Д.И.* Приёмы умственной деятельности и их формирование у школьников / Д.И. Богоявленский // Вопросы психологии. – 1962. – №2. – С. 15-21.
3. *Васильченко И.* Сучасна математика та методика її викладання / И. Васильченко // Вища школа. – 2001. – №6. – С.33-37.
4. *Васюкова Е.Е.* Уровни развития познавательной потребности и их проявление в мышлении / Е.Е. Васюкова // Вопросы психологии. – 1998. – №3. – С. 91-103.
5. *Гнеденко Б.В.* О развитии мышления и речи на уроках математики / Гнеденко Б.В. // Математика в школе. – 1996. – №3. – С. 18-21.
6. *Груденов Я. И.* Психолого-дидактические основы методики обучения математике / Я. И. Груденов. – М.: Педагогика, 1987. – 158 с.
7. *Давыдов В.В.* Виды обобщения в обучении / В.В. Давыдов. – М.: Педагогика, 1972. – 346 с.
8. *Кабанова-Меллер Е.Н.* Формирование приёмов умственной деятельности и умственное развитие учащихся / Е.Н. Кabanова-Меллер. – М.: Просвещение, 1968. – 458 с.
9. *Коротяев В.И.* Обучение приёмам умственной деятельности / В.И. Коротяев // Математика в школе. – 2003. – №4. – С. 36-38.
10. *Осинская В.Н.* Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математики / В.Н. Осинская. – К.: Рад. шк., 1989. – 188 с.
11. *Поспелов Н.Н., Поспелов И.Н.* Формирование мыслительных операций у старшекласников / Н.Н. Поспелов, И.Н. Поспелов. – М.: Педагогика, 1989. – 152 с.
12. *Пуриш Т.В.* Евристичний метод порівняння на різних етапах уроків математики / Пуриш Т.В. // Математика в школах України. – 2003. – №36. – С.8-11.
13. *Сиваківський Б.С.* Узагальнення як метод наукового пошуку / Б.С. Сиваківський // Математика в школі. – 2000. – №1. – С.23-28.
14. *Слепкань З.І.* Методика навчання математики / З.І. Слепкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.
15. *Суліма К.* Активізація логічного мислення учнів на уроках математики / К. Суліма // Математика в школі. – 2002. – №4. – С.35-39.
16. *Чаплыгин В.Ф.* Сравнение и классификация в упражнениях "с модулями" / В.Ф. Чаплыгин // Математика в

школе. – 2003. – №9. – С. 48-51.

Подано до редакції 03.10.11.
